Elementare Termumformungen

Im Kerncurriculum „wird nur dann explizit sowohl auf den Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge als auch auf hilfsmittelfrei zu erwerbenden Kompetenzen hingewiesen, wenn Abgrenzungen deutlich werden sollen. Fehlen diese Hinweise, ist der hilfsmittelfreie Erwerb der Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten intendiert.“[1]

Im Folgenden wird an Beispielen die maximale Komplexität beschrieben, die jeder Schüler ‚im Kopf‘ bzw. ‚zu Fuß‘ (also durch Notation von Zwischenschritten) ohne CAS können sollte. Die Beispiele ‚im Kopf‘ bilden ein Repertoire von sicher beherrschten Techniken, die bei den Beispielen ‚zu Fuß‘ dann sicher abgerufen werden können. Die Grenzen sind fließend.

Die Fertigkeit, Terme und Gleichungen mit der angegebenen maximalen Komplexität umzuformen bzw. zu lösen, sollte am Ende der jeweiligen Unterrichtseinheit erreicht sein.

Im folgenden Unterricht werden dann Lerninhalte „durch geeignete **Wiederholungen** und **Übungen** aus dem Kontext der Erstbegegnung gelöst und an geeigneten Stellen des gesamten Mathematikunterrichts geübt. Regelmäßige Kopfübungen sind ein bewährter, sinnvoller Weg. Übungs- und Wiederholungsphasen sollten über den aktuellen Lernbereich hinaus vernetzend sein.[2] Es kann sinnvoll sein, in Übungen auch über die hier beispielhaft benannte Komplexität hinauszugehen.

Für die Übersichtlichkeit wurde als Variable x bzw. a und b als Parameter verwendet. Im Unterricht sollte darauf geachtet werden, dass bei kontextgebundenen Gleichungen die Variable sachlogisch bezeichnet sind.

[1] s. Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5-10 2013, Kapitel 3 Erwartete Kompetenzen

[2] s. KC, Kapitel 2.2 Kompetenzentwicklung

Thema	‚im Kopf‘	‚zu Fuß‘
Grundrechenarten Bruchterme	$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ $2-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}-\frac{3}{7}$ $\frac{1}{6}+\frac{7}{3}-\frac{11}{12}$
	$\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}$	$\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{35}$
	$\frac{2}{3}:4$ $\frac{5}{6}:\frac{7}{11}$	$\frac{5}{6}:\frac{25}{24}$
Grundrechenarten Zahlterme	$-3+12$ $-3{,}2+13{,}8$	$-3{,}21+13{,}18$
	$3\cdot(-12)$ $2{,}5\cdot(-4)$	$13\cdot 57$ $3{,}5\cdot(-4{,}2)$
	$12:(-3)$	$420:15$ $50{,}4:12$
Terme zusammenfassen	$8\cdot a+2\cdot b-a-4\cdot a+b$ $a-a^2+5\cdot a+3\cdot a^2$	
Distributivgesetz Ausklammern	$4\cdot(3\cdot a+5\cdot b)$ $-3\cdot(x-5\cdot y)$ $x^2-5\cdot x$ $16\cdot x-12\cdot x^2$	$2\cdot a\cdot\left(2{,}5\cdot a\cdot b-5\cdot a\cdot b^2\right)$ $-5\cdot a\cdot\left(6\cdot b-0{,}5\cdot a^2\cdot b\right)$
Summen multiplizieren		$(3\cdot a-b)\cdot(4\cdot b+2a)$
Binomische Formeln als Spezialfall Faktorisieren	$(2\cdot a-b)^2$ $x^2-8\cdot x+16=0$ $x^2+x+\frac{1}{4}=0$	
Lineare Gleichungen	$3\cdot x=8$ $8=-3\cdot x$ $3\cdot x+4=8$ $\frac{1}{4}\cdot x=-3$	$x+5=\frac{1}{3}\cdot x-7$ $6\cdot x+4=\frac{1}{2}\cdot x-7$ $-10+x=x-1$ $2\cdot x-3=a$

Thema	‚im Kopf‘	‚zu Fuß‘
Verhältnisgleichungen	$\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$ $\frac{x}{5}=-4$	$\frac{x+4}{3}=\frac{1}{2}$ $\frac{3}{x}=\frac{4}{7}$ Gleichungen der Form $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ nach allen Parametern auflösen.
Lineare Gleichungssysteme	$x=y+1$ $y+x=5$	$3\cdot x-8=2\cdot y$ $-4\cdot x+y=-9$
quadratische Gleichungen	$x^2-5\cdot x=0$ $3\cdot(2\cdot x-1)\cdot(2+x)$ =0	$(x+2)^2-5=0$ $2\cdot x^2+6\cdot x=0$ $3\cdot x^2-18=0$
	$x^2-81=0$ $x^2-8=0$	$x^2-2x+5=0$
Wechsel zwischen den Darstellungsformen bei quadratischen Funktionen	$f(x)=x^2+8\cdot x$ wechseln zu $f(x)=x\cdot(x+8)$ und umgekehrt $f(x)=x^2-\frac{3}{4}\cdot x$ wechseln zu $f(x)=x\cdot\left(x-\frac{3}{4}\right)$ und umgekehrt	$f(x)=x^2-5\cdot x+1$ wechseln zu $f(x)=(x-2{,}5)^2-5{,}25$ und umgekehrt $f(x)=(x-5)\cdot(x+1)$ wechseln zu $f(x)=x^2-4\cdot x-5$ und umgekehrt $f(x)=(x-2)^2-5$ wechseln zu $f(x)=\left(x-2-\sqrt{5}\right)\cdot\left(x-2+\sqrt{5}\right)$ und umgekehrt

Thema	‚im Kopf‘	‚zu Fuß‘
Potenzgesetze	$(-2)^3$ 2^{-3} $a^3 \cdot a^6$ $a^4 \cdot b^4$ $a^{-3} \cdot a^6$ $3{,}45 \cdot 10^{-3}$	Terme, die nicht über die Komplexität kontextgebundener Terme hinausgehen
	$a^4 : a^7$ $a^3 : b^3$ $a^5 : a^{-3}$	
	$\left(a^4\right)^5$ $\left(2^n\right)^3$	
Exponentialgleichungen	$2^{x+1} = 64$	$3^{4 \cdot x - 5} = 27$
Wurzelgesetze	$4 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ $\sqrt{\frac{49}{25}}$ $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$	Teilweises Radizieren $\sqrt{18}$ $\left(4 \cdot \sqrt{2}\right)^2$

AUSZÜGE AUS DEM KERNCURRICULUM

2.2 Kompetenzentwicklung

Grundlage für einen erfolgreichen Auf- und Ausbau des Kompetenznetzes sind Fertigkeiten im flüssigen und flexiblen Umgehen u.a. mit Zahlen, Größen und geometrischen Objekten. Nach wie vor ist der sichere Umgang mit Termen und Termumformungen mit und ohne Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge von grundlegender Bedeutung.

2.4 Zum Einsatz von Medien

Um Kompetenzen langfristig aufzubauen, ist eine angemessene Balance zwischen hilfsmittelfreiem Arbeiten und der Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge erforderlich. Nach wie vor werden für grundlegende Verfahren wie zum Beispiel Termumformungen und Gleichungslösen hilfsmittelfreie Routinen entwickelt und durch regelmäßige Übungs- und Wiederholungsphasen gesichert.
Chancen und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge bedürfen somit einer kritischen Reflexion.

3 Erwartete Kompetenzen

Es wird nur dann explizit sowohl auf den Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge als auch auf hilfsmittelfrei zu erwerbenden Kompetenzen hingewiesen, wenn Abgrenzungen deutlich werden sollen. Fehlen diese Hinweise, ist der hilfsmittelfreie Erwerb der Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten intendiert.

3.1 Prozessbezogene Kompetenzbereiche

3.1.2 Probleme mathematisch lösen

• wenden elementare mathematische Regeln und Verfahren wie Messen, Rechnen und einfaches logisches Schlussfolgern zur Lösung von Problemen an.	• wenden algebraische, numerische, grafische Verfahren oder geometrische Konstruktionen zur Problemlösung an.	

3.1.5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

	• formen überschaubare Terme mit Variablen hilfsmittelfrei um.	
• nutzen die Umkehrung der Grundrechenarten.	• nutzen tabellarische, grafische und algebraische Verfahren zum Lösen linearer Gleichungen sowie linearer Gleichungssysteme.	• wählen geeignete Verfahren zum Lösen von Gleichungen.

3.2 Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche

3.2.1 Zahlen und Operationen

• deuten Brüche als Anteile und Verhältnisse. • nutzen das Grundprinzip des Kürzens und Erweiterns von einfachen Brüchen als Vergröbern bzw. Verfeinern der Einteilung. • deuten Dezimalzahlen als Darstellungsform für Brüche und führen Umwandlungen durch.	• deuten Prozentangaben als Darstellungsform für Brüche und führen Umwandlungen durch.	
• lösen einfache Rechenaufgaben mit nicht-negativen rationalen Zahlen im Kopf. • rechnen schriftlich mit nicht-negativen rationalen Zahlen in alltagsrelevanten Zahlenräumen.	• lösen einfache Rechenaufgaben mit rationalen Zahlen im Kopf. • führen Rechnungen, auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen, aus und bewerten die Ergebnisse.	• ziehen in einfachen Fällen Wurzeln aus nicht-negativen rationalen Zahlen im Kopf.
• nutzen Rechenregeln zum vorteilhaften Rechnen.	• formen Terme mithilfe des Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetzes um und nutzen die binomischen Formeln zur Vereinfachung von Termen.	• begründen exemplarisch Rechengesetze für Quadratwurzeln und Potenzen mit rationalen Exponenten und wenden diese an.
• nutzen Zusammenhänge zwischen den Grundrechenarten auch bei Sachproblemen.	• lösen Grundaufgaben bei proportionalen und antiproportionalen Zusammenhängen, der Prozent- und Zinsrechnung mit Dreisatz.	
	• lösen lineare Gleichungen und Verhältnisgleichungen jeweils in einfachen Fällen hilfsmittelfrei.	• lösen quadratische Gleichungen vom Typ $x^2 + p \cdot x = 0$ und $x^2 + q = 0$ hilfsmittelfrei.

3.2.4 Funktionaler Zusammenhang

		• wechseln bei quadratischen Funktionstermen in einfachen Fällen hilfsmittelfrei zwischen allgemeiner und faktorisierter Form sowie Scheitelpunktform.