<u>Zum propädeutischen Grenzwert</u>

Ziel ist *nicht* die Hochschuldefinition, nach der eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen einen Grenzwert a konvergiert, wenn folgendes gilt: $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$. Schon der Begriff der Folge ist *nicht* im Kerncurriculum enthalten.

Beispiele (wie die Approximation von π, die Approximation von $\sqrt{2}$ etwa nach Heron oder die Approximation von $\frac{1}{3}$ durch Dezimalbrüche) zeigen, dass die approximierenden Werte sich immer mehr einem Grenzwert nähern. Hier ist die Vokabel „nähern" noch zu unscharf, denn $\frac{1}{n}$ nähert sich für größer werdende Werte von n nicht nur der 0, sondern auch der -1.

Die approximierenden Werte sind bekannt, der Grenzwert häufig noch nicht. Was soll nun der Grenzwert sein? Hier erweist es sich als sinnvoll, den *dynamischen* Aspekt (man kann immer weiter approximieren) zu ersetzen durch einen *statischen* Aspekt und dabei auch die Blickrichtung umzukehren: Nun argumentiert man vom Grenzwert her und überlegt, welche Eigenschaften er in Bezug auf die approximierenden Werte haben muss.

Eine erste Annäherung kann darin bestehen, dass man sagt, dass in jeder (auch noch so kleinen) Umgebung des Grenzwerts unendlich viele approximierende Werte liegen müssen. Das Gegenbeispiel $(-1)^n + \frac{1}{n}$ zeigt jedoch, dass man diese Forderung schärfer fassen muss: Außerhalb jeder (auch noch so kleinen) Umgebung des Grenzwerts dürfen nur endlich viele approximierende Werte liegen.

Gibt man also einen beliebig kleinen (absoluten) Abstand vor, so haben die approximierenden Werte, wenn man nur die Approximation genügend weit fortsetzt, einen noch kleineren Abstand zum Grenzwert, und das bleibt auch so, wenn man die Approximation noch weiter fortsetzt. Das ist der anschauliche Hintergrund der Hochschuldefinition.

<u>Einige mögliche Fehlvorstellungen</u>:

a. „Der Grenzwert wird nie erreicht": Betrachtet man $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x \xrightarrow{x\to\infty} 0$, so durchquert der Graph die x-Achse sogar unendlich oft.

b. Numerisch sind die ersten approximierenden Werte interessant; denn je weiter man approximiert, um so weniger unterscheiden sich die Werte. In Bezug auf den Grenzwert sind dagegen die ersten Werte uninteressant. Es ist sogar so, dass der Grenzwert sich nicht ändert, wenn man eine große Anzahl von approximierenden Werten permutiert oder sogar weglässt.

c. In vielen (aber nicht allen) Fällen hat der Grenzwert eine *andere Qualität* als die approximierenden Werte. So sind die approximierenden Dezimalzahlen zu $\frac{1}{3}$ alle abbrechend, während der Grenzwert es nicht ist. Die approximierenden Werte beim Heron-Verfahren sind rational, während der Grenzwert als Wurzel irrational ist. Bei der Kreisberechnung werden Kreise durch n-Ecke approximiert, während die Grenzfigur (der Kreis) nicht eckig ist.

d. In der Notation wird gewöhnlich zwischen Rechnung und Resultat der Rechnung nicht unterschieden ($a + b$ ist oftmals keine Handlungsanweisung); ebenso unterscheidet man in der Notation nicht zwischen Grenzprozess und Grenzwert, obwohl es sich um Verschiedenes handelt. Die Schülerschwierigkeiten mit $0,\overline{9} = 1$ haben hier ihre Ursache.

e. Grenzprozesse sind mit dem nur auf den ersten Blick banalen Begriff der Unendlichkeit verbunden: Im Vergleich zu dem, was man an Approximationen schon geleistet hat, hat man alles noch vor sich, und das, was man noch vor sich hat, wird auch nie weniger.

f. Auch wenn man über Grenzwerte reden kann, so kann doch ein Grenzwert numerisch oder geometrisch unbekannt bleiben. Möglicherweise kann er *nur* durch die Approximation beschrieben werden. Das ist etwa bei π der Fall. Anders ist es bei dem auch geometrisch konstruierbaren Bruch $\frac{1}{3}\left(=0,\overline{3}\right)$ oder der auch geometrisch konstruierbaren Wurzel $\sqrt{2}$ anders.