Die Kenntnisse über Parametervariationen bei den aus dem Sekundarbereich I bekannten Funktionen – lineare, quadratische und exponentielle Funktionen sowie Sinus- und Kosinusfunktionen – werden aufgegriffen und systematisiert und dann auf Potenz- und Polynomfunktionen als neue Funktionen übertragen.

Dabei werden die leitenden Fragestellungen bei der Untersuchung der Auswirkungen von Parametervariationen auf Funktionsgraphen und Funktionsterme angewendet. Ein vertieftes Verständnis wird durch den Darstellungswechsel Gleichung – Graph – Tabelle gefördert. Funktionales Denken, grafisches Vorstellungsvermögen und Termstrukturerkennung ergänzen sich. Als prozessbezogene Kompetenz kommt also besonders K4 – Mathematische Darstellungen verwenden – zum Tragen: Die Schülerinnen und Schüler identifizieren und klassifizieren Funktionen, die in Tabellen, Termen, Gleichungen und Graphen dargestellt sind und wechseln zwischen den Darstellungsformen.

Die Fähigkeit, Funktionsgraphen zu beschreiben und zu klassifizieren, wird durch Verwendung der Begriffe Symmetrie, Nullstellen und deren Vielfachheit sowie Globalverhalten weiter entwickelt.

Lineare und quadratische Funktionen

Bei linearen Funktionen wird man nicht von Parametervariationen sprechen. Gleichwohl sollten die Kompetenzen im Umgang mit den zugehörigen Termen und Graphen wiederholt werden.

Quadratische Funktionen wurden im Sekundarbereich I behandelt und dabei auch die Auswirkungen von Parametervariationen untersucht. Hier wird also die Sicherung und Systematisierung bekannter Kenntnisse im Fokus stehen.

Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion kann in verschiedenen Formen gegeben sein:

Scheitelpunktform: $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e\,;\, a \neq 0$

allgemeine Form: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c\,;\, a \neq 0$

faktorisierte Form: $f(x) = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)\,;\, a \neq 0$

Der Streckfaktor a gibt in jeder Form die Streckung oder Stauchung der Parabel an.

Außerdem gibt das Vorzeichen des Faktors a Aufschluss über die Öffnung der Parabel.

Der Parameter d beschreibt die Verschiebung der Parabel in Richtung der x-Achse.

Die Parameter e sowie c beschreiben die Verschiebung der Parabel in Richtung der y-Achse.

Der Parameter b beschreibt die gleichzeitige Verschiebung in Richtung der x- und der y-Achse.

Die Parameter m und n geben die Nullstellen der Parabel an.

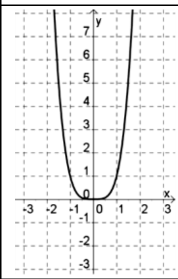
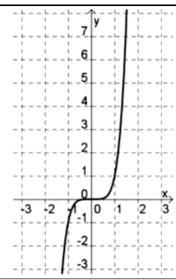
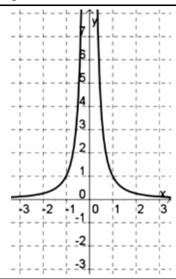
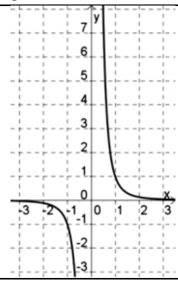
Wichtig ist an dieser Stelle sicher auch ein Vergleich der Aussagekraft der verschiedenen Formen:
- Streckung/Stauchung und Öffnung der Parabel können jeder Form entnommen werden.
- Scheitelpunktform und allgemeine Form liefern den Schnittpunkt mit der y-Achse.
- Die Scheitelpunktform liefert den Scheitelpunkt.
- Aus der faktorisierten Form können die Nullstellen abgelesen werden.

Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die verschiedenen Formen der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion wechselseitig ineinander umzuformen. Dieses sollte in einfachen Fällen hilfsmittelfrei gekonnt werden.

Parametervariationen bei Potenzfunktionen

Potenzfunktionen haben eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = a \cdot (x - d)^n + e$ mit reellen Parametern a, d und e und einer ganzen Zahl n ($n \neq 0$) als Exponent.

Klassifizierungen nach der Potenz n können zunächst für Funktionen f mit $f(x) = x^n$ erfolgen:

		n positiv		n negativ	
		n gerade	n ungerade	n gerade	n ungerade
Globalverhalten	Symmetrie	zur y-Achse $f(x) = f(-x)$	zum Ursprung $f(x) = -f(-x)$	y-Achse $f(x) = f(-x)$	zum Ursprung $f(x) = -f(-x)$
	Verhalten für $x \to +\infty$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to 0$	$f(x) \to 0$
	Verhalten für $x \to -\infty$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to 0$	$f(x) \to 0$
	Asymptoten	-	-	x-Achse y-Achse	x-Achse y-Achse
	Beispielgraph				

Das Verhalten für $|x| \to \infty$ bzw. für $|x| \to 0$ wird graphisch sowie tabellarisch untersucht. Dabei wird der Begriff der Asymptote eingeführt.

Die Untersuchung der allgemeinen Potenzfunktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot (x - d)^n + e$ mit reellen Parametern a, d und e und einem ganzzahligen Exponenten n ($n \neq 0$) liefert folgende Ergebnisse:

Die Parameter haben hier dieselbe Bedeutung wie bei der quadratischen Funktion:

Auch hier gibt der Parameter a die Streckung oder Stauchung des Funktionsgraphen an.

Negatives a bewirkt zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse.

Der Parameter d beschreibt die Verschiebung des Funktionsgraphen in Richtung der x-Achse.

Der Parameter e beschreibt die Verschiebung des Funktionsgraphen in Richtung der y-Achse.

		n positiv		n negativ	
		n gerade	n ungerade	n gerade	n ungerade
Globalverhalten	Symmetrie	zur Geraden zu $x = d$	zum Punkt (d|e)	zur Geraden zu $x = d$	zum Punkt (d|e)
	Verhalten für $x \to +\infty$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to e$	$f(x) \to e$
	Verhalten für $x \to -\infty$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to e$	$f(x) \to e$
	Asymptoten	-	-	$x = d\,;\, y = e$	$x = d\,;\, y = e$

Die quadratische Funktion kann als Potenzfunktion mit $n = 2$ in diese Tabelle eingeordnet werden.

Parametervariationen bei Exponentialfunktionen[1]

Auch Exponentialfunktionen sind aus dem Sekundarbereich I bekannt. Sie haben eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = a \cdot b^{x-d} + e\,;\, x \in IR$; mit reellen Parametern a, d und e und beliebiger positiver Basis b ($b \neq 1$).

Die bei der Untersuchung der Potenzfunktionen gewonnenen Erkenntnisse über die Bedeutung der Parameter für den Funktionsgraphen können an ausgewählten Exponentialfunktionen beispielhaft überprüft werden. Betrachtet man Beispiele der Form $f(x) = 2 \cdot 3^x\,;\, g(x) = 3^{x-5}\,;\, h(x) = 3^x - 4\,;\, x \in IR$, stellt man fest, dass die Parameter hier dieselben Auswirkungen auf die Funktionsgraphen haben wie bei den vorher untersuchten Funktionen.

Der Parameter a gibt die Streckung oder Stauchung des Funktionsgraphen an.

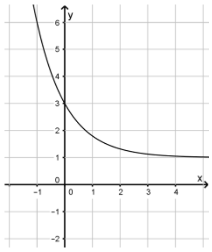
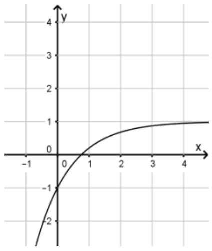
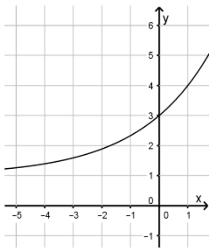
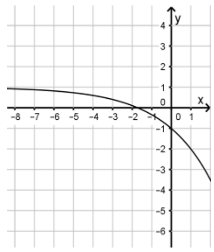
Negatives a bewirkt zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse.

Der Parameter d beschreibt die Verschiebung des Funktionsgraphen in Richtung der x-Achse. Durch Anwendung der Potenzrechengesetze, wird deutlich, dass dieses einer Streckung in y-Richtung entspricht.

Der Parameter e beschreibt die Verschiebung des Funktionsgraphen in Richtung der y-Achse.

Weitere Klassifizierungen nach den Werten der Parameter a und b sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

[1] weitere Ausführungen s. Onlinematerial zu KC Sek I exponentielle Zusammenhänge und Calimero Bd.8 exponentielle Prozesse und Wachstumsprozesse

		$0<b<1$		$b>1$	
		a positiv	a negativ	a positiv	a negativ
	Monotonie	Graph fällt streng monoton	Graph steigt streng monoton	Graph steigt streng monoton	Graph fällt streng monoton
Globalverhalten	Verhalten für $x \to +\infty$	$f(x) \to e$	$f(x) \to e$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to -\infty$
	Verhalten für $x \to -\infty$	$f(x) \to +\infty$	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to e$	$f(x) \to e$
	Asymptoten	$y = e$	$y = e$	$y = e$	$y = e$
	Beispielgraph				

Auch hier werden die Asymptoten graphisch sowie tabellarisch bestimmt.

Exponentialfunktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = a \cdot g^{s \cdot x - t} + e\,;\, x \in IR\,;\, a, s, t, e \in IR$ mit positiver Basis g können in die Form $f(x) = a \cdot b^{x} + e\,;\, x \in IR$ umgeformt werden.

Parametervariationen weiterer Funktionen[2]

Die bei der Untersuchung der bisherigen Funktionen gewonnenen Erkenntnisse über die Bedeutung der Parameter für den Funktionsgraphen können an Funktionen weiterer Funktionsklassen wie Wurzelfunktionen und Sinusfunktionen exemplarisch überprüft und übertragen werden.

Betrachtet man Beispiele der Form $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-3}\,;\, g(x) = \sqrt{x} - 4\,;\, h(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}\,;\, x \in IR$,

stellt man fest, dass die Parameter hier dieselben Auswirkungen auf die Funktionsgraphen haben wie bei den vorher untersuchten Funktionen.

Wurzelfunktionen der Form $f(x) = r \cdot \sqrt{s \cdot (x - c)} + e\,;\, x \in IR\,;\, r, s, c, e \in IR$ können exemplarisch in die Form $f(x) = a \cdot \sqrt{x - c} + e\,;\, x \in IR\,;\, a, r, s, e \in IR$ umgeformt werden.

[2] s. ebda

Betrachtet man für die Sinusfunktion zunächst Beispiele wie
$f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 1;\ g(x) = \sin(x - 3);\ h(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sin(x)$, so können die bisherigen Ergebnisse über die Bedeutung der Parameter für die zugehörigen Funktionsgraphen übertragen werden.

Bei Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d;\ a, b, c \in IR$ bewirkt der Parameter b eine Streckung des Graphen in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{b}$. Dabei kann der Parameter b nicht durch eine Termumformung eliminiert werden.

Bei der Untersuchung von Sinusfunktionen sollten Definitionsmengen in Grad- und Bogenmaß berücksichtigt werden.